10. Lös ekvationssystemet

a. $\begin{cases} 5x + 2y + 2z = 7 \\ x - y + 3z = 8 \\ 3x - y - 3z = -2 \end{cases}$.   b. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 3 \\ x - 2y + 3z = 5 \end{cases}$.

11. Ange för alla reella a lösningsmängden till ekvationssystemet $\begin{cases} -2x + y + 2z = 3 \\ ax + 2y + z = 1 \\ x + 3y - z = 4 \end{cases}$.

12. Vad är villkoret på talet a för att ekvationssystemet $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1 \\ 3x - y + 2z = a \\ x - 5y + 8z = 1 \end{cases}$ skall ha någon lösning?

13. Bestäm varje värde på konstanten a för vilket det existerar en rät linje parallell med de tre planen $x + y + z = 1$, $ax + (a + 3)y + z = 2$, $5x - ay + 2z = 3$.

14. Bestäm för varje a–värde antalet lösningar till systemet $\begin{cases} 2ax + 3y + az = 4a \\ x + (a - 1)y = a \\ x - y + z = 1 \end{cases}$.

20. Beräkna determinanten:

a. $\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ b. $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

21. Sätt $A = (1 \ \ 1 \ \ -3)$ och $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Beräkna AB^T. Beräkna $(AB)^T$.

22. Bestäm inversen till matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

23. Beräkna $B^{-1}A^{-1}$ då $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

24. A är en inverterbar 4×4–matris sådan att $A^2 + A = 0$. Bestäm A.

Svar:

10a. $(1,-1,2)$.   10b. $(t, 2 - t, 3 - t)$.

11. $a = -1$ olösbart; $a \neq -1$ $x = \dfrac{-20}{7(a+1)}$, $y = \dfrac{11}{7}$, $z = \dfrac{5a - 15}{7(a+1)}$.

12. $a = 3$.   13. $a = -2$.

14. $a \neq -1$, $a \neq 3$ en lösning; $a = -1$ ingen lösning; $a = 3$ oändligt många lösningar.

20a. 0.   20b. -18.

21. $(-6 \ \ -7 \ \ 4)$, $(-6,-4,5)^T$.   22. $\begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -8 & -1 & 6 \\ 5 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

23. $1/4 \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ 24. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

25. Lös matrisekvationen

a. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 4 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

30. Bestäm de värden på a för vilka vektorerna $(1,a,a+1)$ och $(a,4,-a)$ är parallella.

31. Är punkterna (3,7,–2), (5,5,1), (6,–2,2), (4,0,–1) hörn i en parallellogram?

32. En cirkel med medelpunkten i (–4,1) har ändpunkten till en diameter i punkten (2,6). Var ligger denna diameters andra punkt?

33. För vilka värden på a är vektorerna $(a,-2,1)$ och $(2a,a,-4)$ vinkelräta?

34. Bestäm vinkeln mellan vektorerna (1,2,3) och (5,2,–3).

35. Bestäm en vektor vars vinklar med positiva x–, y– och z–axlarna är $\pi/3$, $3\pi/4$ resp $2\pi/3$ och vars längd är 2.

36. Bestäm projektionen av vektorn (3,3,3) på vektorn (1,2,1).

37. Kan $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 3$ om $|\boldsymbol{u}| = 2$ och $|\boldsymbol{v}| = 1$?

38. Skriv vektorn (7,–2,3) som en summa av två vektorer, varav den ena är parallell med (2,2,1) och den andra är vinkelrät mot samma vektor.

39. En parallellogram har hörnpunkterna (1,3,2), (2,–1,1), (–1,2,3) och (0,–2,2). Sök parallellogrammens area.

40. Vektorerna $(1,-1,1)$ och $(a,0,2)$ utgör två sidor i en triangel. Bestäm a så att triangelns yta blir $= \sqrt{6}$.

41. Beräkna volymen av en parallellepiped som har en kantlinje från (1,–4,6) till (4,–1,4), en annan från (4,–1,4) till (2,3,4) och en tredje från (2,3,4) till (9,5,6).

61. Bestäm ekvationen för den räta linje som går genom punkterna (1,0,–2) och (4,6,2).

62. En rät linje går genom punkten (0,1,2) och är ortogonal mot såväl vektorn (2,–3,1) som vektorn (1,4,–2). Angiv linjens ekvation.

63. Avgör om någon av punkterna (1,4,–1) eller (–1,3,–6) ligger på linjen $x = 3 + 2t$, $y = 5 + t$, $z = 2 + 4t$.

64. Avgör om linjerna $(x,y,z) = (2,3,7) + t(1,-1,1)$ och $(x,y,z) = (-1,2,0) + s(-1,8,6)$ skär varandra.

65. Undersök om vektorerna (1, 1, 1), (2, 1, 2) och (3, 1, 3) ligger i samma plan.

Svar:

25a. $\begin{pmatrix} 0 & 17 & -5 \\ 1 & -9 & 4 \\ 1 & 58 & -20 \end{pmatrix}$.

25b. $\begin{pmatrix} 5-2s & 2-2t \\ -3+s & 2+t \\ s & t \end{pmatrix}$.

30. $a = -2$.

31. Ja.

32. (–10,–4).

33. $a = 2$ och $a = -1$.

34. $\pi/2$.

35. $(1,-\sqrt{2},-1)$.

36. (2,4,2).

37. Aldrig i livet!

38. $\frac{13}{9}(2,2,1) + \frac{1}{9}(37,-44,14)$.

39. $\sqrt{107}$.

40. $a = 4$ eller $a = -2$.

41. 100.

61. $(1+3t, 6t, -2+4t)$.

62. $(2t, 1+5t, 2+11t)$.

63. (1,4,–1) nej, (–1,3,–6) ja.

64. Ja.

65. Ligger i samma plan.

66. Ett plan är ortogonalt mot vektorn $(3,1,2)$ och innehåller punkten $(-3,7,4)$. Ange planets ekvation.

67. Visa att linjerna $(x,y,z) = (1,2,1) + t(3,-1,1)$ och $(x,y,z) = (2,3,0) + s(1,-1,1)$ ligger i samma plan och bestäm ekvationen för detta plan.

68. Bestäm a så att vektorn $(1,a,3)$ blir parallell med planet $x + 2y + 3z = 1$.

69. Bestäm skärningspunkten mellan planet $2x + y - 2z + 1 = 0$ och linjen $(x,y,z) = (2,3,1) + t(1,1,0)$.

70. Planen $x + 4y - 3z = 2$ och $3x - y + 2z = 3$ skär varandra längs en rät linje. Angiv linjens ekvation.

71. Sök ekvationen för den linje som går genom punkten $(1,2,1)$ och är vinkelrät mot planet $x + 2y - z = 0$.

73. Avgör om punkterna $(3,9,6)$ och $(-2,5,3)$ ligger på samma sida eller på olika sidor om planet $x - y - z + 11 = 0$.

74. Bestäm kortaste avståndet mellan planet $x + 2y + 3z = 4$ och punkten $(3,1,1)$.

75. Bestäm avståndet från det plan som går genom punkterna $(4,3,2)$, $(6,0,0)$ och $(-2,8,4)$ till punkten $(5,4,2)$.

77. Beräkna avståndet från punkten $(2,5,2)$ till linjen $(x,y,z) = (2,0,0) + t(2,1,2)$.

78. Bestäm avståndet mellan linjerna $(x,y,z) = (-1 + 2t, -3 + t, -t)$ och $(x,y,z) = (4,2,3) + s(1,5,1)$.

79. Bestäm ekvationen för den linje som går genom punkten $(1,2,3)$ och som skär linjen $(x,y,z) = (6,0,4) + t(3,-2,3)$ vinkelrätt.

81. Ange standardmatrisen för den linjära avbildningen T, som ges av $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + z \\ x + y \\ y + z \end{pmatrix}$.

82. Bestäm en linjär avbildning T, sådan att $T(3,4) = (5,6)$ och $T(2,3) = (7,8)$.

83. För en linjär avbildning T gäller att $T(9,8,7) = (1,1,0)$ och $T(1,1,1) = (1,0,0)$. Bestäm
    a. $T(11,10,9)$.
    b. någon vektor (x,y,z) som avbildas på $(0,1,0)$.

Svar:

61. $(1 + 3t, 6t, -2 + 4t)$.
62. $(2t, 1 + 5t, 2 + 11t)$.
63. $(1,4,-1)$ nej, $(-1,3,-6)$ ja.
64. Ja.
65. Ligger i samma plan.
66. $3x + y + 2z = 6$.
67. $y + z = 3$.
68. $a = -5$.
69. $(0,1,1)$.
70. $(5t, 13/5 - 11t, 14/5 - 13t)$.
71. $(1 + t, 2 + 2t, 1 - t)$.
73. På olika sidor.
74. $4/\sqrt{14}$.
75. 1.
77. $\sqrt{20}$.
78. $\sqrt{14}$.
79. $(1 + 2t, 2, 3 - 2t)$.
81. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
82. $\begin{pmatrix} 13x + 11y \\ -14x + 12y \end{pmatrix}$
83a. $(3,1,0)$.
83b. $(8,7,6)$.

90. Skriv vektorn $(1,-2)$ i $\mathbf{R}^2$ som en linjärkombination av $(2,1)$ och $(3,2)$.

91. Undersök om vektorn $(5,6,3)$ kan skrivas som en linjärkombination av vektorerna $(1,1,2)$, $(2,3,1)$ och $(4,5,5)$.

92. Bestäm talet a så att $(1-a,2,0)$ och $(6,4,a+2)$ är linjärt beroende.

93. Undersök om vektorerna är linjärt oberoende $(1,3,-2)$, $(-3,-5,6)$, $(0,5,-6)$?

94. Undersök om vektorerna $(1,2,3)$, $(3,2,1)$, $(2,1,3)$ bildar en bas för $\mathbf{R}^3$.

95. Undersök om vektorerna $(1,0,2)$, $(3,0,1)$, $(5,0,-2)$, $(7,0,-4)$ spänner upp $\mathbf{R}^3$.

100. Bestäm egenvärden och egenvektorer till matrisen

a. $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 4\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$

101. Vilka av följande matriser är diagonaliserbara:

a. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}$

102. Sök en matris C sådan att $C^{-1}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}C$ är en diagonalmatris då

a. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ b. $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

103. Undersök om man kan bilda en bas i $\mathbf{R}^2$ bestående av egenvektorer till matrisen $\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

Om så är fallet ange en sådan bas.

104. Matrisen A har egenvärden -1, 0 och 2 och motsvarande egenvektorer $(-1, 1, 0)$, $(0, 1, -1)$ resp. $(2, 1, 3)$. Bestäm A.

105. Bestäm A^{11} då $A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$

Svar:

90. $(1,-2)=8(2,1)-5(3,2)$.

91. Kan inte.

92. $a=-2$.

93. Linjärt oberoende.

94. Bildar en bas.

95. Det gör de inte.

100a. $\lambda_1=4$, $\lambda_2=-2$. Motsvarande egenvektorer $(1,1)$, $(-1,1)$.

100b. $\lambda_1=1$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=-4$. Motsvarande egenvektorer $(4,-3,0)$, $(3,4,5)$, $(3,4,-5)$.

101. a, c och d.

102a. $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

102b. $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$

103. T.ex $(1,0)$, $(0,1)$.

104. $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

105. $\begin{pmatrix}2048 & -2048 & 2048\\ 2047 & -2047 & 2048\\ 2047 & -2047 & 2048\end{pmatrix}$

106. Bestäm på huvudaxelform ekvationen för kurvan

a. $11x^2 - 4xy + 14y^2 = 5.$ b. $x^2 + 6xy + y^2 = 2.$

107. Bestäm på huvudaxelform ekvationen för ytan

a. $4xy + 4xz + 4yz = 2.$ b. $3x^2 + 4xy + 2y^2 + 4xz + 4z^2 = 3.$

111. I $\mathbf{R}^2$ väljs ett nytt koordinatsystem med basvektorerna (2,3) och (4,5). Vilka är koordinaterna för den vektor som i det gamla systemet har koordinaterna (6,7)?

112. En rät linje i ett plant xy–system har ekvationen $2x - y = 4$. Ett uv–system införs med basvektorerna $\boldsymbol{u} = (2,3)$ och $\boldsymbol{v} = (4,5)$. Vilken är ekvationen för den räta linjen i det nya systemet?

113. En linjär avbildning i $\mathbf{R}^2$ har i standardbasen matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Ett nytt koordinatsystem med basvektorerna (2,3) och (4,5) införs. Vilken är avbildningens matris i det nya systemet?

114. Bestäm matrisen för den vinkelräta projektionen på linjen $3x + 2y = 0$ i xy–planet, (ON–system).

115. Låt $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ och $\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2\}$ vara två baser i planet. Vektorerna (1,2) respektive {3,4) i $\boldsymbol{e}$–basen har i $\boldsymbol{f}$–basen koordinaterna (5,6) respektive (7,8). Bestäm koordinaterna för $\boldsymbol{f}$–basen i $\boldsymbol{e}$–basen.

116. Ange en minstakvadratlösning till ekvationssystemet $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$.

117. Ange ekvationen för den räta linje $y = ax + b$ som i minstakvadratmening bäst anpassar till punkterna (1,4), (2,5) och (3,7).

118. Bestäm funktionen $y = a\sqrt{x} + b$ som i minstakvadratmening bäst anpassar mätvärdena (1,2), (4,5), (9,11) och (16,18).

119. Ange ekvationen för det plan $z = ax + by + c$ som i minstakvadratmening bäst anpassar till punkterna (1,1,0), (1,0,1), (1,–1,1) och (2,–1,2).

120. Beräkna normen till matrisen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Svar:

106a. $3u^2 + 2v^2 = 1.$

106b. $2u^2 - v^2 = 1.$

107a. $4u^2 - 2v^2 - 2w^2 = 1.$

107b. $2u^2 + v^2 = 1.$

111. (–1,2)

112. $u + 3v = 4.$

113. $\begin{pmatrix} -6 & -9 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

114. $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}$

115. $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

116. $x = 4/11,\ y = -4/11.$

117. $y = \frac{3}{2}x + \frac{7}{3}$

118. $y = \frac{27}{5}\sqrt{x} - \frac{9}{2}$

119. $z = \frac{5}{6}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{6}$

120. $\sqrt{6}.$